

1. 정답 ①

$x^2 - \sqrt{7}x + 1 = 0$ 의 양변을 x 로 나누면 $x + \frac{1}{x} = \sqrt{7}$.

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 5$$

2. 정답 ③

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = \frac{-2i}{2} = -i$$

$$\frac{1+i}{1-i} = -\frac{1}{i} = -\frac{i}{i^2} = i$$

$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2016} + \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2016} = (-i)^{2016} + i^{2016} = 1 + 1 = 2$$

3. 정답 ④

$x^2 - x + k = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면 두 점 사이의 거리가 두 근의 차이므로

$$\sqrt{5} = |\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{1-4k}}{1}, \quad 5 = 1 - 4k$$

$$\therefore k = -1$$

4. 정답 ②

$x^2 - 2x + 1 = t$ 로 치환하면 $-1 \leq x \leq 1$ 일 때, $0 \leq t \leq 4$

$$y = (x^2 - 2x + 1)^2 - 2(x^2 - 2x + 1) + 2$$

$$= t^2 - 2t + 2 = (t-1)^2 + 1 \text{ 이므로}$$

$t = 4$ 일 때, 최댓값 $\alpha = 10$, $t = 1$ 일 때, 최솟값 $\beta = 1$

$$\therefore \alpha - \beta = 9$$

5. 정답 ②

$-x^2 - 2(m-1)x + (m-3) > 0$ 의 근이 존재 하지 않으므로

$x^2 - 2(m-1)x + (m-3) = 0$ 이 중근 또는 존재하지 않아야

하므로 $\frac{D}{4} = (m-1)^2 - (-1)(m-3) = m^2 - m - 2 \leq 0$

$$\therefore -1 \leq m \leq 2$$

6. 정답 ③

주어진 식을 x 에 대한 내림차순으로 정리하면

$$5x^2 - 2(2y-1)x + y^2 + 1 = 0$$

이 식이 실근을 가져야 하므로

$$\frac{D}{4} = (2y-1)^2 - 5(y^2+1) = -y^2 - 4y - 4 \geq 0$$

$$\therefore y = -2, \quad x = -1, \quad \therefore x + y = -3$$

7. 정답 ④

$\log x$ 의 지표가 2 이므로 $2 < \log x \leq 3$

가수가 같으므로 $\log x - \log \sqrt{x} = \frac{1}{2} \log x$ 가 정수가 되어야

한다.

따라서 $1 \leq \frac{1}{2} \log x < \frac{3}{2}$ 이고 $\frac{1}{2} \log x$ 는 정수이므로

$$\frac{1}{2} \log x = 1 \quad \therefore x = 100$$

8. 정답 ①

$$S_1 = 9 + k$$

$$a_n = S_n - S_{n-1} = 3^{n+1} + k - (3^n + k) = 2 \cdot 3^n$$

$$\therefore a_1 = 6$$

$$a_1 = S_1 \text{ 이어야 하므로 } 9 + k = 6 \quad \therefore k = -3$$

<다른풀이>

$S_n = a \cdot r^n + b$ 의 일반항 $\{a_n\}$ 이 첫째항부터 등비수열이 되기

위해선 $a + b = 0$ 이어야 한다.

$$S_n = 3^{n+1} + k = 3 \cdot 3^n + k \text{ 이므로 } 3 + k = 0$$

9. 정답 ②

$$x^2 + y^2 - 2x + 2y - 6 = (x-1)^2 + (y+1)^2 = 8 \text{ 이므로}$$

중심 $C(1, -1)$, 반지름 $r = 2\sqrt{2}$ 인 원이고 중심 C 에서

직선 $y = x - 8$ 까지의 거리를 d 라 하면

$$d = \frac{|1 - (-1) - 8|}{\sqrt{1+1}} = 3\sqrt{2}$$

원 위의 점에서 직선까지의 거리의 최소값은 $d - r$ 이므로

$$d - r = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

10. 정답 ①

$$2[x]^2 - 5[x] + 2 = (2[x] - 1)([x] - 2) < 0$$

$$\frac{1}{2} < [x] < 2, \quad [x] = 1 \quad \therefore 1 \leq x < 2$$

$$\alpha + \beta = 3$$

11. 정답 ③

$$-\frac{1}{nx} + n = (n-2)x \quad \text{정리하면 } n(n-2)x^2 - n^2x + 1 = 0$$

위 방정식의 두 근이 A_n, B_n 이므로 $A_n B_n = \frac{1}{n(n-2)}$ 이다.

$$\begin{aligned} \sum_{n=3}^{\infty} A_n B_n &= \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(n-2)} = \frac{1}{2} \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n} \right) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \cdots + \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{1}{n-3} - \frac{1}{n-1} \right) + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n} \right) \right\} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

12. 정답 ②

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{x^3 + 2} = 1, \quad g(0) = 2 \text{ 이므로 } g(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$$

$(g \circ f)(x)$ 는 $x = 0, x = 2$ 에서 연속이면 실수 전체에서 연속이다.

(1) $x = 0$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} g(f(x)) = \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 8 + 4a + 2b + 2 = 4a + 2b + 10$$

$$g(f(0)) = g(0) = 2 \quad \therefore 4a + 2b + 10 = 2 \quad \cdots \quad \textcircled{1}$$

(2) $x = 2$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow -2+0} g(f(x)) = \lim_{x \rightarrow -2} g(x) = -8 + 4a - 2b + 2 = 4a - 2b - 6$$

$$g(f(2)) = g(0) = 2 \quad \therefore 4a - 2b - 6 = 2 \quad \cdots \quad ②$$

$$\begin{aligned} ①, ② \text{를 연립하면 } a &= 0, b = -4 \quad \therefore g(x) = x^3 - 4x + 2 \\ g(1) &= -1 \end{aligned}$$

13. 정답 ①

로피탈의 정리를 이용하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)g(x) - 2}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}{1} \\ &= f'(0)g(0) + f(0)g'(0) = 8 + g'(0) = 5 \\ \therefore g'(0) &= -3 \end{aligned}$$

14. 정답 ②

$g(x)$ 를 y 축으로 α 만큼 평행이동 시킨식이 $3x^3 - 11x + \alpha$ 이므로
 $x^3 - 3x^2 + x = 3x^3 - 11x + \alpha, \quad 2x^3 + 3x^2 - 12x + \alpha = 0$

$g(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + \alpha$ 라 두고 미분하면

$$g'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 0, \quad x = -2 \text{ or } x = 1$$

서로 다른 두 점에서 만나도록 하려면 극대 $\times$ 극소 >0 이어야 한다

$$\text{따라서 극대값 } g(-2) = -16 + 12 + 24 + \alpha = 0 \quad \therefore \alpha = -20$$

$$\text{극소값 } g(1) = 2 + 3 - 12 + \alpha = 0 \quad \therefore \alpha = 7$$

α 의 합은 -13

15. 정답 ④

$f(x)$ 는 우함수 이므로

$$\int_{-1}^1 (4x^3 + 5x - 2)f(x)dx = -2 \int_{-1}^1 f(x)dx = -12$$

$$\therefore \int_{-1}^1 f(x)dx = 6 \quad \cdots \quad ① \quad \int_0^1 f(x)dx = 3 \quad \cdots \quad ②$$

또, $f(x)$ 는 주기가 2인 주기함수이므로

$$\int_{-5}^{-3} f(x)dx = \int_{-3}^{-1} f(x)dx = \cdots = \int_3^5 f(x)dx = 6$$

$$\int_{-5}^6 f(x)dx = 5 \int_{-1}^1 f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx = 33$$

16. 정답 ④

$$\begin{aligned} 18 - \int_1^2 (x^3 + 2x - 2)dx + 1 &= 19 - \int_1^2 (x^3 + 2x - 2)dx \\ &= 19 - \frac{19}{4} = \frac{57}{4} \end{aligned}$$

17. 정답 ①

공역과 치역이 일치한다는 것은 공역의 모든 원소가 대응되는 것이므로 정의역의 원소 5개를 3개의 조로 나누어 각각 1 또는 2 또는 3에 대응시키면 된다.

A 의 원소 5개의 원소를 3개의 조로 나누는 방법의 수는 (3개, 1개, 1개), (2개, 2개, 1개)

(i) A 의 원소 5개를 3개, 1개, 1개로 나눈 다음 각각을 Y 의 원소 6 또는 7 또는 8에 대응시키는 방법의 수는

$${}_5C_3 \times {}_2C_1 \times {}_1C_1 \times \frac{1}{2!} \times 3! = 60(\text{가지})$$

(ii) A 의 원소 5개를 2개, 2개, 1개로 나눈 다음 각각을 Y 의 원소 6 또는 7 또는 8에 대응시키는 방법의 수는

$${}_5C_2 \times {}_3C_2 \times {}_1C_1 \times \frac{1}{2!} \times 3! = 90(\text{가지})$$

(i), (ii)에서 구하는 집합 F 의 개수는 $60 + 90 = 150(\text{개})$

또 집합 F 중 ' $x_1 < x_2$ ' 라면 $f(x_1) \leq f(x_2)$ 를 만족하는 원소의 개수는 X 의 원소를 크기순으로 3개의 부분집합으로 나누어야 하므로 (3개, 1개, 1개)를 크기순으로 나누는 방법의 수는

$$\frac{3!}{2!} = 3$$

마찬가지로 (2개, 2개, 1개)를 크기순으로 나누는 방법의

$$\text{수도 } \frac{3!}{2!} = 3$$

그러므로 ' $x_1 < x_2$ ' 라면 $f(x_1) \leq f(x_2)$ 를 만족하는 f 의

개수는 $3 + 3 = 6$ 이다.

$$\text{따라서 확률은 } \frac{6}{150} = \frac{1}{25}$$

18. 정답 ③

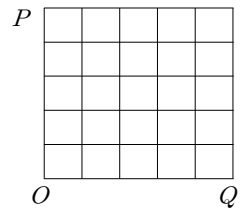
3의 배수가 나올 확률은 $\frac{1}{3}$,

3의 배수가 나오지 않을 확률은 $\frac{2}{3}$

따라서 5번 시행으로 5보다 작은 점에

도착하는 경우의 수는 전체경우의 수에서 P 또는 Q 에 도착하는

$$\text{경우를 제외 하면 된다. } 1 - \left\{ {}_5C_0 \left(\frac{1}{3} \right)^5 + {}_5C_5 \left(\frac{2}{3} \right)^5 \right\} = \frac{210}{243}$$



19. 정답 ④

$$\sum_{i=1}^5 z_i = \sum_{i=1}^5 (2x_i - 10) = 2 \sum_{i=1}^5 x_i - 50 = 10 \quad \therefore \sum_{i=1}^5 x_i = 30$$

$$x_1, x_2, \dots, x_5 \text{의 평균 } E(X) = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i}{5} = 6$$

$$\sum_{i=1}^5 z_i^2 = \sum_{i=1}^5 (2x_i - 10)^2 = \sum_{i=1}^5 (4x_i^2 - 40x_i + 100)$$

$$= 4 \sum_{i=1}^5 x_i^2 - 40 \sum_{i=1}^5 x_i + 500 = 4 \sum_{i=1}^5 x_i^2 - 1200 + 500 = 100$$

$$\therefore \sum_{i=1}^5 x_i^2 = 200 \quad \therefore E(X^2) = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i^2}{5} = \frac{200}{5} = 40$$

$$\text{분산 } \sigma^2 = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = 40 - 36 = 4$$

20. 정답 ②

빨간색 공이 나온 횟수를 x , 파란색 공이 나온 횟수를 y 하 하면

$$x + y = 150, \quad 3x - 2y \geq 180 \quad \therefore x \geq 96$$

즉, 빨간공이 나온 횟수를 X 라 하면 $X \geq 96$ 이고 빨간색 공이

나올 확률은 $\frac{2}{5}$ 이다.

이항분포를 $B\left(150, \frac{2}{5}\right)$ 를 따르므로

$$\text{평균 } m = 150 \times \frac{2}{5} = 60, \quad \text{분산 } \sigma^2 = 150 \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = 36$$

$$P(X \geq 96) = P\left(z \geq \frac{96 - 60}{6}\right) = P(z \geq 6) = 1 - P(0 \leq z \leq 6)$$

$$= 1 - 0.94 = 0.06$$